Números complejos

Introducción

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que *"ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación"* y acuñó el calificativo *"imaginarias"* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución es un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibnitz *"el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser."*.

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la *"naturaleza"* de los mismos; no se preguntaron "¿qué es un número complejo?", sino que se dijeron *"a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos"*. Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido como **Teorema Fundamental del Álgebra** que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*. Aunque la demostración de este teorema la verás más adelante en cursos superiores ya puedes entender lo que significa. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x+3=0, \quad 2x+3=0, \quad x^2-2=0, \quad x^2+2x+2=0$$

Cuyas soluciones

$$x=-3, \quad x=3/2, \quad x=\pm\sqrt{2}, \quad x=1\pm i$$

tienen sentido cuando x es es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1-i)x^4+(1/5-i\sqrt{2})x^2-8x+3-i/\sqrt{3}=0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de *"números complejos"* se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "*i*" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Recordemos, finalmente, la afirmación de Hadamard *"El camino más corto entre dos verdades del campo real pasa con frecuencia por el campo complejo"*.

Definición. Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a,-b)$ es el opuesto de (a,b), y todo $(a,b)\neq(0,0)$ tiene inverso

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (léase "el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de adición y producto") es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman **números complejos**.

Comentarios a la definición

A los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama unas veces *pares ordenados de números reales*, otras *vectores* o *puntos* y también *números complejos*. La razón de esto es que en $\mathbb{R}^2$ conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Por eso a los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama *vectores* si se está considerando la estructura de espacio vectorial, *puntos* si fijamos la atención en la estructura topológica o afín, *pares ordenados* cuando estamos pensando en $\mathbb{R}^2$ como conjunto sin ninguna estructura particular y *números complejos* cuando se considera la estructura de cuerpo antes definida. Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo **concepto matemático** tiene sentido propio dentro de una determinada **estructura matemática**. Por ello, a un elemento de $\mathbb{R}^2$ se le llama número complejo cuando se va a usar el producto antes definido que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de $\mathbb{R}^2$.

El símbolo usual (a,b) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (a,b). Para convencerte calcula $(1,-1)^4$. Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observa que:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$$
$$(a,0)(b,0)=(ab,0)$$

esto indica que los números complejos de la forma $(a,0)$ se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. En términos, más técnicos, $\mathbb{R}\times\{0\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$. Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo $(a,0)$ por el número real a. Es decir, hacemos la identificación $(a,0)=a$.

Fíjate que con dicha identificación el producto $a(c,d)$ tiene dos posibles interpretaciones: producto del escalar real a por el vector (c,d) (estructura vectorial de $\mathbb{R}^2$) y producto del complejo $(a,0)$ por el complejo (c,d). Pero ambos coinciden y son iguales a (ac,ad).

El número complejo $(0,1)$ lo representaremos por i. Con ello tenemos que

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

Ahora podemos escribir

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

Se dice que a es la **parte real** y b es la **parte imaginaria** del número complejo $a+ib$. El producto ahora es muy fácil de recordar pues

$$(a+ib)(c+id)=ac+i^2bd+i(ad+bc)=ac-bd+i(ad+bc)$$

Es costumbre representar los números complejos con las letras z y w y reservar las letras x, y, u, v para representar números reales. Una expresión de la forma $z=x+iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y. Se escribe $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ para representar las partes real e imaginaria de z. Naturalmente, dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

Comentario

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$. Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$i^2 = -1 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Luego $1 = -1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado. Pásate a Derecho.

Naturalmente, el error, procede de que estamos haciendo disparates. Fíjate que en la expresión $\sqrt{-1}$ no puedes interpretar que -1 es el número real -1 (porque, como sabes, los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real), sino que tienes que interpretar -1 como el número complejo -1 (espero que ya tengas clara la diferencia). Resulta así que estamos usando raíces de números complejos *sin haberlas definido y dando por supuesto que dichas raíces verifican las mismas propiedades que las de los números reales positivos*.

Antes de escribir $\sqrt{-1}$ hay que definir qué significa $\sqrt{z}$ para $z \in \mathbb{C}$. Cuando lo hagamos veremos ¡sorpresa! que *la igualdad* $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$, válida cuando $z, w \in \mathbb{R}^+$, *no es cierta en general cuando* $z, w \in \mathbb{C}$.

Todavía más disparatado es *definir* $i = \sqrt{-1}$ sin ni siquiera haber definido antes los números complejos. Sin embargo, y aunque parezca mentira, en muchos textos se define (porque sí, sin más explicaciones) $i = \sqrt{-1}$ y a continuación se dice que los números de la forma $a + ib$ son los números complejos. No es de extrañar que luego resulte que $1 = -1$.

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho (como te convencerás cuando estudies la teoría de funciones de variable compleja) pero también perdemos algo. Te recuerdo que $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. En efecto, si suponemos que $\leqslant$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación $\leqslant$ no respetara el orden de $\mathbb{R}$). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio.

Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con no escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo de un número complejo

Es usual interpretar el número complejo $x+iy$ como el vector del plano (x,y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

Si $z=x+iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:

$$\bar{z}=x-iy$$

y el **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Observa que $\sqrt{x^2+y^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo x^2+y^2.

Geométricamente $\overline{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x,y) a $(0,0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (x,y) (ver figura 1). La **distancia** entre dos números complejos z y w se define como $|z-w|$.

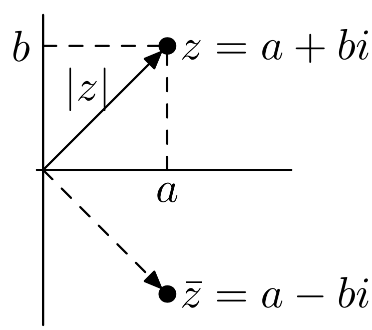

Figura 1: Representación de un número complejo

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z=a+ib$ y $w=c+id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 2) es $z+w$.

Se comprueba fácilmente que si z y w son números complejos se verifica que $\bar{\bar{z}}=z$, $\overline{z+w}=\bar{z}+\overline{w}$ y $\overline{zw}=\overline{z}\overline{w}$.

También son de comprobación inmediata las desigualdades

$$\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|,|\operatorname{Im} z|\}\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$$

La igualdad $|z|^2=z\bar{z}$ que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, permite utilizar el producto complejo para trabajar con módulos y es de gran utilidad. La usaremos para

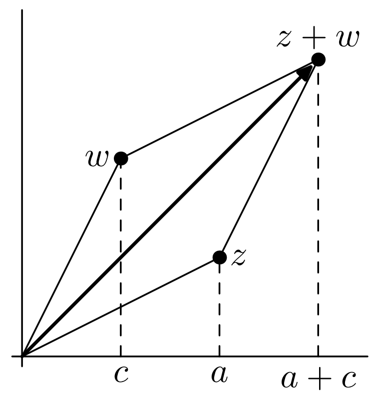

Figura 2: Suma de números complejos

probar que para todos $z,w\in\mathbb{C}$ es

$$\textbf{a)}\ \ |zw|=|z||w| \quad \text{y} \quad \textbf{b)}\ \ |z+w|\leqslant|z|+|w|$$

a) Basta observar que $|zw|$ y $|z||w|$ son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2=zw\overline{zw}=zw\overline{z}\overline{w}=z\overline{z}w\overline{w}=|z|^2|w|^2=(|z||w|)^2$$

b) Es suficiente probar que $|z+w|^2\leqslant(|z|+|w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)}=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+\overline{z}w=\\ &=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w})\leqslant|z|^2+|w|^2+2|\operatorname{Re}(z\overline{w})|\leqslant\\ &\leqslant|z|^2+|w|^2+2|z\overline{w}|=|z|^2+|w|^2+2|z||\overline{w}|=|z|^2+|w|^2+2|z||\overline{w}|=\\ &=(|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

Deducimos también que se verifica la igualdad $|z+w|=|z|+|w|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re}z\overline{w}=|z\overline{w}|$, esto es, si $z\overline{w}\in\mathbb{R}_o^+$, o lo que es lo mismo $z\overline{w}=\rho$ donde $\rho\in\mathbb{R}_o^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente multiplicando por w como $z|w|^2=\rho w$, esto es, $z=\lambda w$ para algún $\lambda\in\mathbb{R}_o^+$ lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen.

Forma polar de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z=x+iy\neq0$ podemos escribir

$$z=|z|\left(\frac{x}{|z|}+i\frac{y}{|z|}\right)$$

Como $\left(\frac{x}{|z|},\frac{y}{|z|}\right)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{|z|},\frac{y}{|z|}\right)=(\cos\vartheta,\operatorname{sen}\vartheta)$$

para algún número $\vartheta \in \mathbb{R}$. Resulta así que

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**, cuya interpretación gráfica vemos en la figura 3.

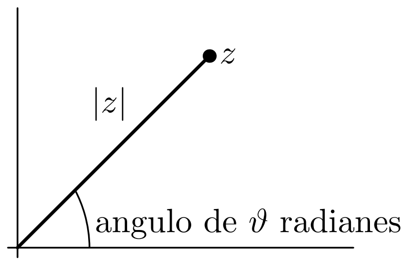

Figura 3: Forma polar de un número complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(\cos t, \operatorname{sen} t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i\operatorname{sen} t)\}$$

Observa que

$$s, t \in \operatorname{Arg}(z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow s = t + 2k\pi \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_o \in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_o + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\operatorname{Arg}(z) = t_o + 2\pi\mathbb{Z}$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y viene dado por

$$\arg(z) = 2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \quad \text{si } z \notin \mathbb{R}^-$$
$$\arg(z) = \pi \quad \text{si } z \in \mathbb{R}^-$$

A dicho argumento se le llama **argumento principal** de z.

La comprobación de las anteriores afirmaciones es fácil. Como $-\pi/2 < \operatorname{arc}\operatorname{tg} t < \pi/2$, se sigue que $-\pi < \arg(z) < \pi$ si $z \notin \mathbb{R}^-$. Luego, $-\pi < \arg(z) \leqslant \pi$. Si $z = t \in \mathbb{R}^-$ es evidente que $z = |t|(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$. Y para $z \notin \mathbb{R}^-$ se tiene:

$$\cos(\arg(z)) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)} = \frac{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{2\operatorname{Re} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{2|z|(|z| + \operatorname{Re} z)} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

$$\operatorname{sen}(\arg(z)) = \frac{2\operatorname{tg}(\arg(z)/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)} = \frac{2\operatorname{Im}z(|z|+\operatorname{Re}z)}{(|z|+\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2} = \frac{2\operatorname{Im}z(|z|+\operatorname{Re}z)}{2|z|(|z|+\operatorname{Re}z)} = \frac{\operatorname{Im}z}{|z|}$$

Donde se ha utilizado que $|z|^2 = (\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2$.

No es difícil comprobar que el argumento principal de $z = x+iy \neq 0$ viene también dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y \leqslant 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi & \text{si } y \geqslant 0, x < 0 \end{cases}$$

Esta última forma es quizás más cómoda para los cálculos.

Observación

Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. La elección que hemos hecho supone que medimos ángulos en el semiplano superior de 0 a π y en el semiplano inferior de 0 a $-\pi$.

Fíjate que si tomas un número complejo que esté situado en el tercer cuadrante $z = x+iy$ con $x < 0, y < 0$ y supones que y es próximo a 0, su argumento principal está próximo a $-\pi$, y si tomas un número complejo que esté situado en el segundo cuadrante, $w = x+iv$ con $x < 0, v > 0$, y supones que v es próximo a 0, su argumento principal está próximo a π. Además, la distancia $|w-z| = |v-y| = v-y$ es tan pequeña como quieras. Esto nos dice que el argumento principal tiene una discontinuidad en el eje real negativo: salta de $-\pi$ a π cuando atravesamos dicho eje desde el tercer al segundo cuadrante.

Peor todavía dirás. Hasta cierto punto. Primero, la discontinuidad es inevitable. Si queremos elegir argumentos en un intervalo de longitud 2π, digamos, $[\alpha, \alpha+2\pi[$ entonces dichos argumentos saltan de α a $\alpha+2\pi$ cuando atravesamos la semirrecta $(x,y) = \rho(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $(\rho > 0)$. En particular, si tomamos argumentos en el intervalo $[0, 2\pi[$ (cosa que, a primera vista, parece lo razonable) nos encontramos con que entonces se produce una discontinuidad de dichos argumentos en *el eje real positivo*. Bien, sucede que *la extensión a* $\mathbb{C}$ de algunas funciones definidas en $\mathbb{R}^+$ (el logaritmo, las raíces) hace intervenir el argumento principal. Naturalmente, queremos que dichas extensiones sigan siendo continuas en $\mathbb{R}^+$ y ello justifica que tengamos que tomar argumentos principales de la forma en que lo hemos hecho: porque preferimos introducir una discontinuidad en $\mathbb{R}^-$ a perder la continuidad en $\mathbb{R}^+$.

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$
$$w = |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Entonces

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|(cos(\vartheta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.* Por ejemplo, para calcular $(1+i)^4$ como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \pi/4$, se sigue que $(1+i)^4 = -4$.

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Fórmula de De Moivre

Acabamos de ver que si z, w son complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$, $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$, entonces $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(z+w)$. Es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula, muy útil, conocida como fórmula de *De Moivre*.

$$z^n = |z|^n(\cos n\vartheta + i\operatorname{sen} n\vartheta)$$

donde ϑ es un argumento de z y $n \in \mathbb{Z}$.

Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Ahora, usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n(\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi) = |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta igualdad se da cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (ojo: se trata de la raíz n–ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número φ_k que cumpla $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\vartheta_k + i\operatorname{sen}\vartheta_k)$$

tal que $(w_k)^n = z$. Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k deben dar lugar al mismo número w_k. Veamos:

$$w_k = w_q \Leftrightarrow \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \Leftrightarrow k - q = nm \Leftrightarrow k \equiv q \pmod{n}$$

Deducimos que para $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ obtenemos w_k distintos y cualquier otro w_q es igual a uno de ellos. Por tanto hay n raíces n–ésimas distintas de z.

Si representamos todas las raíces n–ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.

Como para cualquier z complejo existen n raices n–ésimas vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la **raíz n-ésima principal**, que está definida por

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right)$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo).

En general no es cierto que dados dos números complejos z y w entonces el producto de las raíces n-ésimas *principales* de z y de w sea igual a la raíz n-ésima *principal* de zw. Lo que sí es cierto es que el producto de dos raíces n-ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n-ésima de zw. Por tanto, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$, es **una** raíz n-ésima de zw pero no tiene por qué ser la principal.

Por ejemplo, para $n=2, z=w=-1$, como $\arg(-1)=\pi$, tenemos que $\sqrt{-1}=\cos(\pi/2)+i\operatorname{sen}(\pi/2)=i$. En este caso

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i\,i = -1 \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

La igualdad $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$ equivale a que para algún entero k se verifique que

$$\frac{\arg(z)}{n} + \frac{\arg(w)}{n} = \frac{\arg(zw)}{n} + 2k\pi$$

es decir, $\arg(z)+\arg(w) = \arg(zw)+2kn\pi$. Como $-2\pi < \arg(z)+\arg(w) \leqslant 2\pi$ y $n \geqslant 2$ tiene que ser $k=0$ (pues, en otro caso, $|2kn\pi| \geqslant 4\pi$). Luego, debe ocurrir que $\arg(z)+\arg(w) = \arg(z+w)$ lo que equivale a que $-\pi < \arg(z)+\arg(w) \leqslant \pi$.

Por ejemplo, si los números z y w están en el semiplano de la derecha, es decir, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, entonces $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ y $-\pi/2 < \arg(w) < \pi/2$; por tanto $\arg(z)+\arg(w) = \arg(z+w)$ por lo que, en este caso, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

Sucesiones de números complejos

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en $\mathbb{C}$. Como de costumbre, representaremos por $\{z_n\}$ la sucesión dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$.

La definición de sucesión convergente es exactamente la misma que para sucesiones reales: la sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a un número complejo z si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|z_n - z| < \varepsilon$.

Esta condición significa geométricamente que cualquier círculo de radio ε trazado alrededor de z contendrá todos los términos de la sucesión de uno en adelante.

Teorema

La sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a $z\in\mathbb{C}$ si, y sólo si

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$$

esto es, la sucesión $\{\operatorname{Re}_n\}$ converge a $\operatorname{Re} z$ e $\{\operatorname{Im} z_n\}$ converge a $\operatorname{Im} z$.

Demostración

Es consecuencia directa de las desigualdades

$$\max\{|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Gracias a este teorema el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Función exponencial compleja

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z\in\mathbb{C}$. Llamemos $z = x + iy$. Consideraremos que $y \neq 0$, puesto que si $y = 0$ tendríamos que $z = x$ sería un número real. Pongamos $w_n = 1 + z/n$ y

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{y/n}{1+x/n}$$

Sea n_o tal que para $n \geqslant n_o$ se verifique que $\operatorname{Re}(w_n) > 0$. Entonces, para $n \geqslant n_o$ resulta que $\varphi_n = \arg(w_n)$. Por otra parte, el módulo de w_n viene dado por

$$|w_n| = \left|1+\frac{z}{n}\right|^2 = \left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}$$

Tenemos ahora, gracias a la fórmula de De Moivre que

$$(w_n)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}(\cos(n\varphi_n) + i\operatorname{sen}(n\varphi_n))$$

Pero, por el criterio de equivalencia logarítmica, es

$$\lim|w_n|^n = \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right) + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \exp\left(\lim\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2}\right)\right) = e^x$$

Además, la sucesión $\{\varphi_n\}$ es asintóticamente equivalente a la sucesión $\left\{\dfrac{y/n}{1+x/n}\right\}$. Por tanto

$$\text{lím}\{n\varphi_n\} = \text{lím}\{n\frac{y/n}{1+x/n}\} = y$$

En consecuencia, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(w_n)^n = \lim_{n\to\infty}|w_n|^n\big(\cos(n\varphi_n)+i\,\text{sen}(n\varphi_n)\big) = \mathrm{e}^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$$

Definimos, por tanto, la exponencial compleja como

$$\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i\,\text{sen}(\operatorname{Im} z)\big)$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\mathrm{e}^{it} = \cos t + i\,\text{sen}\,t \qquad (\text{para todo } t\in\mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo $t=\pi$ tenemos la singular igualdad

$$\mathrm{e}^{i\pi}+1=0$$

en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas.

De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2} \qquad \text{sen}\,t = \frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2i}$$

Se prueba fácilmente que $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w$ para todos $z,w\in\mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z\in\mathbb{C}$ y todo $k\in\mathbb{Z}$ es

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+2k\pi i}$$

Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función **periódica** con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva.

Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir en que, como vamos a ver enseguida, la ecuación $\mathrm{e}^w = z$, donde z es un número complejo no cero,va a tener infinitas soluciones $w\in\mathbb{C}$. Como

$$\mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i\,\text{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $\mathrm{e}^w = z$ tiene que ser:

1. $|\mathrm{e}^w| = |z|$, esto es, $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} w} = |z|$, por tanto $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo del número real positivo $|z|$).

2. $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w = \arg(w) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que

$$\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama **un logaritmo** de z. De entre todos ellos elegimos uno, llamado **logaritmo principal** definido por

$$\log z = \log|z| + i\arg(z) \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^*$$

Lo mismo que ocurría con las raíces principales de números complejos, la igualdad

$$\log zw = \log z + \log w$$

es cierta si, y sólo si, $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Potencias complejas

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ se define

$$z^w = \exp(x \log z)$$

y dicho número se llama **valor principal** de la potencia de exponente w y base z complejos.